

RBEMF

REVISTA BRASILEIRA DE ECONOMIA
MONETÁRIA E FINANCEIRA

Volume 4 | Número 1 | 2026

ISSN 3085-7643

UMA SIMULAÇÃO DOS MODELOS
DE CRESCIMENTO COM PROGRESSO
TÉCNICO DE SOLOW E DE
CRESCIMENTO ENDÓGENO DE
LUCAS, A PARTIR DO FILTRO DE
KALMAN

*Breno Marzullo Wettreich
João Guilherme Fernandes Dias
João Pedro Netto Lopes*



Uma simulação dos modelos de crescimento com progresso técnico de Solow e de crescimento endógeno de Lucas, a partir do filtro de Kalman

A simulation of the Solow technical progress growth model and the Lucas endogenous growth model, using the Kalman filter.

Breno Marzullo Wettreich João - breno.wettreich@graduacao.ie.ufrj.br

Guilherme Fernandes Dias - joao.g.dias@graduacao.ie.ufrj.br

João Pedro Netto Lopes - joao.p.lopes@graduacao.ie.ufrj.br

RESUMO

Este artigo realiza uma comparação empírica entre dois arcabouços centrais da teoria do crescimento econômico: o modelo de Solow com progresso técnico exógeno e o modelo de crescimento endógeno desenvolvido por Lucas. Com base em séries temporais e em técnicas de espaço de estados, estima-se a dinâmica da produtividade total dos fatores (TFP) em ambos os modelos. A estimação utiliza proxys amplamente empregadas na literatura empírica e aplica o filtro de Kalman para extrair o componente não observável associado à tendência tecnológica. A partir de comparações gráficas e de métricas de erro preditivo, os resultados indicam que o modelo de Lucas apresenta desempenho superior na maioria dos casos analisados, sendo as exceções atribuídas a dinâmicas estruturais específicas de cada economia.

Palavras-Chave: *Crescimento Econômico; Produtividade; Filtro de Kalman*

ABSTRACT

This article provides an empirical comparison between two central frameworks in growth theory: the Solow model with exogenous technological progress and the endogenous growth model developed by Lucas. Using time-series data and state-space methods, the paper estimates the dynamics of total factor productivity (TFP) in both models. The estimation relies on proxies widely used in the empirical literature and applies the Kalman filter to extract the unobserved component associated with the technological trend. Based on graphical analysis and forecast error metrics, the results indicate that the Lucas model outperforms the Solow model in most cases, with the remaining differences attributed to specific structural dynamics across economies.

Keywords: *Economic Growth; Productivity; Kalman Filter*

1. INTRODUÇÃO

O estudo dos determinantes do crescimento econômico de longo prazo ocupa posição central na macroeconomia desde meados do século XX, impulsionadas principalmente pelas contribuições de Robert Solow. A formulação desenvolvida por Solow (1956, 1957) consolidou um arcabouço analítico robusto para entender como capital físico, trabalho e progresso técnico interagem para definir o nível e a trajetória do produto agregado. Nesse contexto, apenas o avanço tecnológico tratado como exógeno é capaz de sustentar crescimento per capita no estado estacionário, o que direcionou grande parte da literatura subsequente para a mensuração da produtividade total dos fatores (PTF) e para o papel da tecnologia como motor do desenvolvimento econômico.

A partir da década de 1980, com o surgimento da teoria do crescimento endógeno, o foco teórico passou a incluir mecanismos internos à economia capazes de gerar crescimento sustentado, independentemente de choques tecnológicos externos. O modelo de Lucas (1988) é particularmente importante nesse movimento ao enfatizar o papel do capital humano, dos processos de aprendizagem e das externalidades associadas à acumulação de habilidades. Diferentemente do arcabouço neoclássico, o modelo de Lucas permite crescimento per capita contínuo mesmo na ausência de progresso técnico exógeno, deslocando a explicação para variáveis endógenas ao sistema econômico.

Este artigo contribui para esse debate ao estimar empiricamente os dois modelos — Solow com progresso técnico exógeno e Lucas com crescimento endógeno via capital humano — utilizando séries temporais de componentes observáveis do modelo (como estoque de capital e trabalho) e técnicas para extração de componentes não observados. Em particular, o filtro de Kalman é empregado para decompor o produto entre seus determinantes estruturais, permitindo estimar a evolução do progresso técnico nos modelos de Solow e de Lucas.

Por fim, ao adotar modelagens com base em dados empíricos a partir do arcabouço teórico de Solow e Lucas com progresso técnico, conclui-se que na maior parte das experiências analisadas o modelo endógeno de Lucas supera, mesmo que em alguns casos marginalmente, o exógeno de Solow. Há casos idiossincráticos que serão abordados durante o artigo, contemplando dinâmicas de crescimento linear e questões estruturais próprias de economias em desenvolvimento.

O restante deste trabalho está organizado da seguinte forma: A Seção 2 apresenta a revisão de literatura, com ênfase na formulação original de Solow (1957) e no modelo de Lucas (1988), a Seção 3 discute em detalhe os modelos teóricos e a metodologia empírica aplicada, a Seção 4 apresenta os resultados e compara o desempenho empírico das especificações. Por fim, a Seção 5 oferece as conclusões dos testes e dos modelos apresentados.

2. Revisão da literatura e dos modelos

2.1 — O modelo de Solow com progresso técnico

O modelo de crescimento de Solow combina uma função de produção agregada com dinâmica de acumulação de capital para explicar a trajetória do produto agregado e das variáveis per capita. A versão clássica do modelo (Solow, 1956) apresenta a estrutura básica com uma função Cobb-Douglas com retornos constantes de escala e chega ao resultado onde a economia converge para um estado estacionário em que o produto per capita deixa de crescer. A incorporação de um termo tecnológico que cresce a uma taxa constante resolve essa limitação e fornece uma explicação para o crescimento per capita sustentado observado pelas economias capitalistas ao longo do tempo (Solow, 1957).

O modelo com progresso técnico exógeno assume uma economia fechada, sem governo, produzindo um único bem através de uma função de produção Cobb-Douglas que combina capital físico K_t , trabalho L_t e um índice de eficiência do trabalho A_t . A especificação Harrod-neutra (aumentadora do trabalho) é a mais utilizada na formulação padrão:

$$Y_t = f(K_t, A_t, L_t),$$

e, na forma Cobb–Douglas com retornos constantes de escala:

$$Y_t = K_t^\alpha (A_t L_t)^{(1-\alpha)}, 0 < \alpha < 1$$

Aqui A_t é tratado como exógeno, não rival e não excludente, e representa um índice de eficiência do trabalho que cresce à taxa constante g_A . A interpretação econômica é direta: o aumento em A_t eleva a produtividade do trabalho e desloca para cima a função de produção, atenuando os efeitos dos rendimentos marginais decrescentes do capital e permitindo crescimento persistente do produto por trabalhador.

Para análise, define-se capital e produto por unidade efetiva de trabalho:

$$k_t = \frac{K_t}{A_t L_t} \quad \therefore \quad y_t = \frac{Y_t}{A_t L_t},$$

de modo que a função de produção se reduz a

$$y_t = k_t^\alpha.$$

A acumulação agregada de capital é dada por

$$\dot{K} = sY - \delta K,$$

onde s é a taxa de poupança e δ a depreciação. Transformando para unidades de eficiência e considerando que L e A crescem às taxas n e g_A , obtém-se a equação de movimento do capital por unidade efetiva:

$$\dot{k} = sk^\alpha - (n + g_A + \delta)k.$$

O termo $(n + g_A + \delta)k$ representa o investimento necessário apenas para manter k constante diante do crescimento populacional, do progresso tecnológico e da depreciação. A dinâmica de transição é governada pelo sinal de \dot{k} , se $sk^\alpha > (n + g_A + \delta)k$, ou seja $\dot{k} > 0$, então k cresce até aproximar-se do novo estado estacionário.

No estado estacionário ($\dot{k} = 0$) tem-se:

$$sk^\alpha = (n + g_A + \delta)k \Rightarrow k^* = \left[\frac{s}{n + g_A + \delta} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}, y^* = k^{*\alpha}.$$

Embora k e y medidos por unidade efetiva apresentem crescimento nulo no estado estacionário, as variáveis por trabalhador crescem permanentemente à taxa do progresso técnico exógeno:

$$\frac{g_Y}{L} = \frac{g_K}{L} = g_A.$$

Dessa forma, o modelo apresenta a presença de progresso técnico exógeno como motor do crescimento sustentado do produto per capita, enquanto a taxa de poupança determina apenas o nível estacionário de k e y , não a taxa de crescimento de longo prazo.

Essas conclusões formam o núcleo da argumentação de Solow sobre a importância do progresso tecnológico como motor do crescimento de longo prazo, resultado que Solow ilustrou empiricamente em seu estudo, atribuindo parcela substancial do crescimento observado à variação residual ligada à tecnologia. A estimativa empírica realizada por Solow para os Estados Unidos no período 1909–1949 levou à conclusão de que uma parcela substancial do crescimento agregado (cerca de 87%) é atribuível ao progresso técnico, e não à acumulação de capital.

2.2 - O modelo de Lucas com capital humano

O modelo de Lucas, desenvolvido na década de 1980, faz parte da família de modelos de crescimento econômico endógeno, partindo do pressuposto de que o cerne do crescimento está na acumulação do capital humano. Ele surgiu como uma alternativa ao modelo neoclássico de Solow, possuindo certas semelhanças como retornos decrescentes ao capital físico, ao passo que incorpora externalidades associadas ao capital humano. O autor, por fim, desenvolve profundamente o impacto da parcela da população que se dedica ao estudo para a absorção de novos conhecimentos, o que impacta diretamente na eficiência do trabalho, elevando sua produtividade.

Portanto, o modelo de Lucas pode ser explicado de acordo com a abordagem de Serrano e Cesarto, que dividem em três apresentações: i) Retornos constantes para conhecimento sem crescimento populacional, ii) Retornos constantes para o conhecimento com crescimento populacional e iii) O modificador de Lucas.

Lucas inicia seu modelo ao dividir a economia em dois setores principais: o setor de produção de bens e setor de produção de conhecimento, chegando à seguinte função de produção:

$$Y = AK^\alpha[(1 - z)LH]^{1-\alpha}$$

Sendo que z representa a parcela da população dedicada à produção de conhecimento, $1 - z$ à produção de bens, H se refere ao nível de conhecimento que aumenta a eficiência do trabalho e j a tecnologia. A taxa de acumulação do H é apresentada da seguinte maneira: $\frac{\dot{H}}{H} = jzL$, ou seja, o conhecimento se acumula de acordo com o nível de tecnologia e a proporção da força de trabalho que se dedica ao conhecimento, implicando em retornos constantes.

Na versão sem crescimento populacional, a taxa de crescimento de Y é igual a taxa de acumulação do capital humano, ou seja, $g_Y = jzL$, assumindo que A não varia com o tempo, taxa de crescimento da população é zero e o capital físico possui retorno marginal decrescente. Dessa forma, o modelo define que o crescimento da economia está relacionado com o ganho de eficiência aplicado ao trabalho com o fator de endogeneidade, dado que z é uma variável de decisão.

Quando se considera o crescimento populacional surge uma problemática. A taxa de crescimento da economia passa a considerar o n , que é a taxa de crescimento da população. Portanto: $g_Y = jzL + n$. A questão é que o n afeta positivamente o L , o que causa um efeito explosivo na taxa de crescimento da economia, ferindo os fatos estilizados. Dessa forma, Lucas propôs um modificador para tirar esse efeito explosivo.

O modificador de Lucas redefine o estoque de trabalho efetivo como: $E = LH$, ou seja, unificando trabalho e eficiência. Nesse sentido, a taxa de acumulação não depende mais do nível absoluto de L , já que a tecnologia produz aumentos do total de trabalho já incorporado. Portanto: $\frac{\dot{E}}{E} = jz$.

Dado que $E = LH$ e $\frac{\dot{E}}{E}$ foi definido como jz , é possível realizar uma análise do efeito desse modificador. Ao aplicar log e derivar o E , é obtido que sua taxa de crescimento equivale a $n + \frac{\dot{H}}{H}$ quando essas duas formas se igualam o resultado obtido é que $\frac{\dot{H}}{H} = jz - n$. Nesse caso, a taxa de acumulação do conhecimento passa a considerar um efeito negativo quando se incorpora o crescimento populacional no modelo, evitando aquele fator explosivo que ocorria no modelo

apresentado anteriormente. Assim, a função de produção da economia pode ser descrita como:
 $Y = AK^\alpha[(1 - z)E]^{1-\alpha}$ e possui taxa de crescimento equivalente a $g_Y = jz - n$.

3. Metodologia de análise: filtro de Kalman

Como anteriormente apresentado, tanto o modelo de Solow com progresso técnico, quanto o modelo de Lucas com conhecimento apresentam em suas equações primordiais uma parte observável e passível de ser computada por dados, mas também há um componente fundamental cuja série é apenas estimada. O progresso técnico nos modelos econômicos está ligado ao incremento tecno-lógico exógeno que recai sobre a produtividade dos fatores de produção considerados no modelo, ou seja, assume o papel de tendência do crescimento da economia.

Nesse sentido, poder-se-ia assumir que as partes do crescimento da renda agregada que não são integralmente explicadas pelas variáveis observáveis, como Capital, Trabalho e Estoque de Trabalho Efetivo, sejam somente erros dos modelos. No entanto, como já explicitado, nas duas formas de compreender as dinâmicas de crescimento das economias, discutidas neste artigo, essa prática omitiria uma variável relevante para o modelo e provavelmente causaria erros econométricos clássicos, como uma autocorrelação residual e a não estacionalidade do termo de erro. Logo, apesar de ser uma variável não observável, a sua estimação é essencial para uma análise empírica completa e metodologicamente correta a partir desses modelos de crescimento.

Dessa maneira, uma das formas de estimar aquilo que empiricamente não é concreto e palpável, é através do filtro de Kalman, ferramenta estatística que, através de um método recursivo de estimativa, possibilita encontrar grandezas latentes sujeitas a equações de estado pré-determinadas. A partir dos anos 1980, o que antes era uma ferramenta mais popular no campo da física e da engenharia, esse arcabouço matemático passou a ser amplamente incorporado à econometria de séries temporais, em grande parte graças à sistematização de Harvey (1989) e, posteriormente, de Durbin e Koopman (2001).

Em termos gerais, o funcionamento dessa ferramenta econométrica se dá a partir da delimitação de uma forma funcional para a variável que não se observa e pretende-se estimar, neste caso o A_t . Como se trata de um componente essencialmente tendencial e exógeno em relação às variáveis centrais do modelo, um passeio aleatório com drift ($A_t = A_{t-1} + \mu + w_t$) contempla bem o comportamento da série. Isto é, o valor de A no tempo t possui uma inércia autorregressiva (A_{t-1}), um espaço para choques estocásticos (w_t) e uma tendência determinística de crescimento (μ). Empiricamente, modelos dinâmicos de equilíbrio geral estocástico (DSGE) costumam tratar a tecnologia da mesma forma que está sendo abordada nesse artigo.

Segundo Cristiano (2010), em seu modelo DSGE:

Our assumption that the neutral technology shock follows a random walk with drift matches closely the finding in Smets and Wouters (2007) who estimate $\log z_t$ to be highly autocorrelated. The direct empirical analysis of Prescott (1986) also supports the notion that $\log z_t$ is a random walk with drift. Finally, Fernald (2009) constructs a direct estimate of total factor productivity growth for the business sector. The first order autocorrelation of quarterly observations covering the period 1947Q2 to 2009Q3 is 0.0034, consistent with the idea of a random walk.

Feito isso, o filtro de Kalman inicia seu processo de estimação: o primeiro passo consiste em atribuir um valor inicial para A_{t-1} (e para a sua variância, podendo ser interpretado como a incerteza associada a esse valor) e, a partir da equação de estado, projetar um valor para A_t . A partir dessa previsão, em conjunto com as demais variáveis observadas do modelo, estima-se um valor para, neste caso, o crescimento da economia (Y_t). Quando o dado efetivo de Y_t é observado, o filtro calcula o erro de previsão e atualiza a estimativa de A_t somando à previsão original uma fração desse erro, ponderada pelo chamado ganho de Kalman. Esse ganho funciona como um peso ótimo que determina o quanto o modelo deve ajustar o estado em direção ao novo dado: se a variância em torno de A_t é alta (ou seja, se o valor estipulado para A_t foi totalmente randômico) e o erro de previsão do Y_t é baixo, o ganho é maior (confere mais peso aos dados observados do que o que foi inicialmente atribuído a A_t) e o ajuste para o próximo valor de A é mais forte; se, ao contrário, o dado observado é muito ruidoso, o ganho é pequeno, e a atualização é mais conservadora. Esse esquema de previsão e correção se repete recursivamente para todos os períodos da amostra, gerando, para cada t , uma estimativa tanto da trajetória da tecnologia A_t quanto da incerteza associada a esse componente não observado.

Neste artigo, a estimação dos modelos em espaço de estados foi implementada no software R por meio do pacote MARSS (*Multivariate Autoregressive State-Space Models*). Do ponto de vista econométrico, o MARSS não apenas aplica o filtro de Kalman para obter, a cada período, estimativas recursivas do estado não observado A_t , como também utiliza essas previsões para construir a função de verossimilhança do modelo e, a partir dela, escolher os valores dos parâmetros que melhor se ajustam aos dados empíricos. Em termos práticos, o algoritmo estima tanto o progresso tecnológico, assim como sua distribuição, quanto os parâmetros relativos às variáveis observadas, como o coeficiente angular do capital e o intercepto da regressão. Esse processo se estende até o ponto em que as iterações sucessivas de maximização do logaritmo do produto das probabilidades de cada observação (máxima log-verossimilhança) param de apresentar variações relevantes, mostrando que alcançou a convergência estatística do modelo.

Além desses recursos econométricos de estimação, a amostra de dados foi dividida em duas partes. Em primeiro lugar, 80% da série (1954 – 2009) foi utilizada para que, não só os parâmetros pudessem ser estimados (*in-sample*), como também a variável não observável, sob o processo já

explicado; em seguida, o bloco final da série (os 20% restantes) foi reservado para avaliar a capacidade preditiva do modelo. Ou seja, em um primeiro instante, a maior parte de cada série de dados (80%) é destinada a “treinar” o modelo, com o processo de estimação se ajustando aos valores observados de Y_t ; em um segundo momento, nos 20% finais (2010 – 2023), mantêm-se os parâmetros fixados e o filtro de Kalman é utilizado para gerar previsões do produto (e da tecnologia implícita) nos períodos restantes, permitindo comparar o desempenho *in-sample* e *out-of-sample* de cada especificação.

4. Construção empírica e resultado dos modelos

Partindo para a formulação dos modelos em si, usaremos a forma em logaritmo natural das funções de produção e a equação de estado já apresentada para o progresso tecnológico (passeio aleatório com drift).

Para Solow:

$$\log Y_t = \beta_0 + \alpha \log K_t + (1 - \alpha) \log L_t + A_t + v_t$$
$$A_t = A_{t-1} + \mu + w_t$$

Para Lucas:

$$\log Y_t = \beta_0 + \alpha \log K_t + (1 - \alpha) \log E_t + (1 - \alpha) \log(1 - z) + A_t + v_t$$
$$A_t = A_{t-1} + \mu + w_t$$

A variável explicada, o PIB, está em termos reais (a preços constantes de 2021), medido em paridade de poder de compra (PPC), em logaritmo, com frequência anual. As *proxys* utilizadas na modelagem para Estoque de Capital (K), Número de Trabalhadores (L) e Estoque de Trabalho Efetivo (E), provenientes de Feenstra et al. (2015), foram, respectivamente, *Capital stock at constant 2021 national prices (million 2021 US\$)*, *Number of persons engaged (millions)* e *Human capital index, based on years of schooling and returns to education*. Enquanto, para a parcela da população destinada a produção de conhecimento (z), recorreremos ao Barro e Lee (2010), usando a parcela de adultos com 25 anos ou mais que estão ou já se graduaram no ensino superior. Como nesta base somente há dados de 5 em 5 anos, e até 2010, fizemos uma interpolação linear, para completar as lacunas entre quinquênios, e uma projeção da série com um modelo ARIMA não sazonal com restrição de valores entre 0 e 1 até 2023.

Com o propósito de estabelecer uma extensa base comparativa, modelamos 4 economias, com características estruturais diversas, diversificando nossa amostra. Os países escolhidos foram: os Estados Unidos da América, o Brasil, o Reino Unido e a Coreia do Sul. Fizemos alguns testes clássicos nos erros (Raiz do erro quadrático médio - RMSE, Erro absoluto médio - MAE e Erro percentual absoluto médio - MAPE) para conseguir comparar o desempenho dos modelos nas

diferentes nações em relação a sua performance *in-sample* e *out-of-sample*. Em termos gerais, se o resultado desses três testes for menor, relativamente, o modelo é melhor.

O *Root Mean Squared Error* (RMSE) é calculado como a raiz quadrada da média dos erros ao quadrado, atribuindo maior peso a erros grandes e sendo, portanto, mais sensível a desvios extremos. O *Mean Absolute Error* (MAE) corresponde à média do valor absoluto dos erros, oferecendo uma medida linear da magnitude média dos desvios entre os valores observados e estimados. Em ambos os casos, como a variável dependente é o logaritmo do PIB, os erros são medidos em log-pontos, podendo ser interpretados aproximadamente como desvios percentuais. Por fim, o *Mean Absolute Percentage Error* (MAPE) é calculado como a média do valor absoluto do erro relativo, multiplicado por 100, sendo expresso diretamente em termos percentuais e indicando, em média, o erro proporcional da previsão em relação ao valor observado.

O período de estimação *in-sample* é modelado tanto com as variáveis independentes quanto com a variável dependente, assim o modelo é capaz de ajustar seus parâmetros e erros ao estabelecer uma regressão que coincida ao máximo com o valor observado. Ou seja, modela-se sabendo o valor do PIB e das variáveis que irão contemplá-lo. Ao passo que, no período *out-of-sample*, modela-se com os parâmetros calculados no período *in-sample*, sem o conhecimento da variável dependente, assim é o momento em que o modelo é realmente testado como um possível bom preditor para o que se observa empiricamente.

Figura 1: Resultado das métricas de erro para países selecionados (Brasil, Coreia do Sul, Reino Unido e Estados Unidos da América)

País	Amostra	RMSE (Solow)	RMSE (Lucas)	MAE (Solow)	MAE (Lucas)	MAPE (Solow)	MAPE (Lucas)
Brazil	In-sample	0.014	0.014	0.010	0.010	0.071	0.072
	Out-of-sample	0.117	0.178	0.111	0.161	0.738	1.065
Korea	In-sample	0.013	0.013	0.010	0.009	0.079	0.072
	Out-of-sample	0.296	0.177	0.270	0.163	1.829	1.106
UK	In-sample	0.016	0.016	0.012	0.012	0.081	0.084
	Out-of-sample	0.169	0.038	0.161	0.032	1.073	0.217
USA	In-sample	0.015	0.019	0.011	0.015	0.071	0.094
	Out-of-sample	0.023	0.023	0.022	0.020	0.131	0.121

A começar pelo modelo de Solow, só pelos gráficos notamos que no período de teste o fit do modelo foi praticamente perfeito nos quatro países analisados. No entanto, a narrativa se altera

quando olhamos para o *out-of-sample*, em que aparentemente somente nos EUA o modelo apresentou uma trajetória coerente, seguido do Brasil, que, em grandes linhas, expressou uma tendência razoável; ao passo que Reino Unido e Coreia do Sul se mostraram com possíveis quebras estruturais.

Essa análise é corroborada pelos testes de erro, em que na parcela *in-sample* o desempenho é bastante semelhante entre os quatro países, com valores de RMSE em torno de 0,013–0,016 e MAPE entre 0,07% e 0,08%, o que indica que a combinação de capital, trabalho e componente tecnológico latente é capaz de reproduzir de forma satisfatória a trajetória observada do PIB nas janelas de estimação. Contudo, ao se olhar para o desempenho *out-of-sample*, surge uma heterogeneidade bem maior: no caso dos Estados Unidos, os erros de previsão permanecem relativamente contidos (RMSE \approx 0,023 e MAPE em torno de 0,13%), sugerindo uma certa estabilidade da relação estimada no período de teste, enquanto Brasil e, sobretudo, Reino Unido e Coreia do Sul apresentam deterioração acentuada, com MAPE superiores a 0,70% no Brasil e ultrapassando 1% no Reino Unido e na Coreia.

Figura 2: Gráfico Modelo de Solow para os EUA

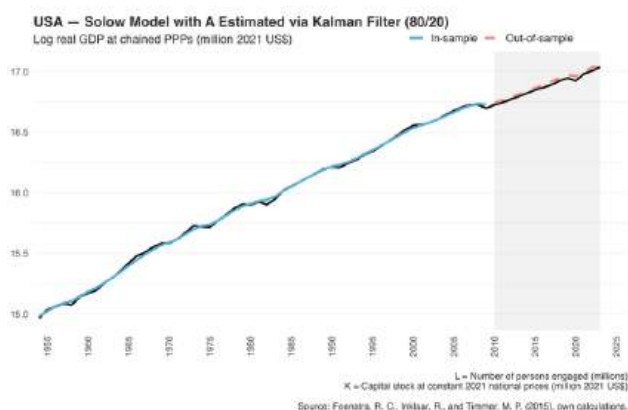


Figura 3: Gráfico Modelo de Solow para o Brasil

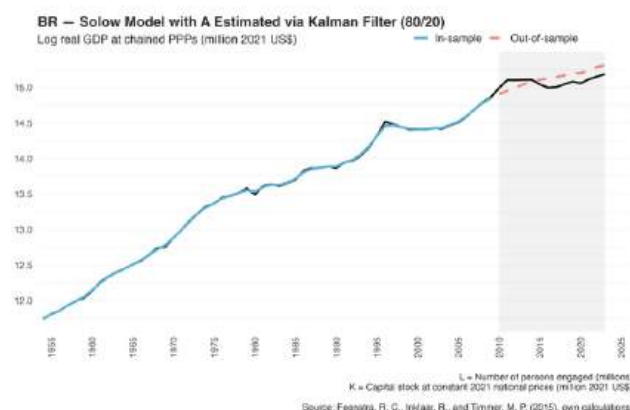


Figura 4: Gráfico Modelo de Solow para o Reino Unido

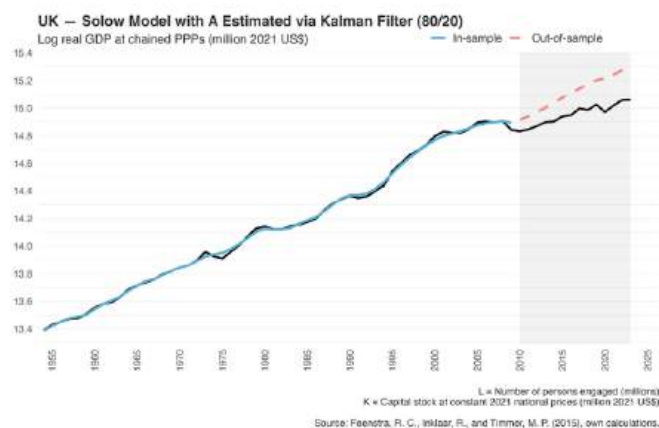
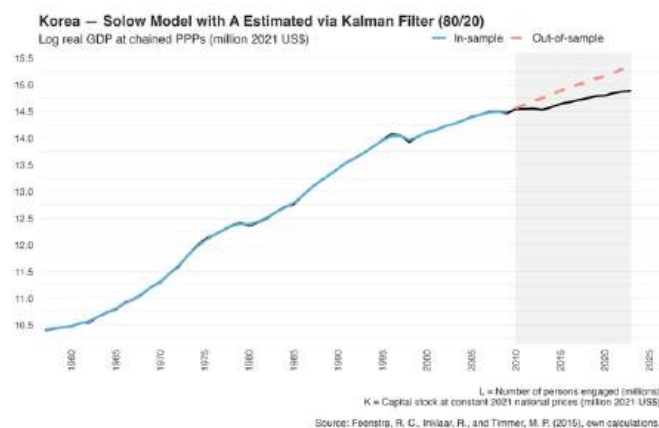


Figura 5: Gráfico Modelo de Solow para a Coreia do Sul



Em relação ao modelo de Lucas, no período teste o modelo é bem satisfatório em todos os países analisados, os valores de RMSE ficam em torno de 0,013–0,019 e os de MAPE entre aproximadamente 0,07% e 0,09%, o que indica que a inclusão do capital humano e da parcela da população dedicada à educação permite reproduzir de forma aceitável a trajetória observada do PIB dentro da amostra de estimação. De forma geral, no período *out-of-sample*, percebe-se pelos gráficos que há uma semelhança entre a trajetória modelada e a observada, expressando valores de RMSE em torno de 0,023-0,178, enquanto MAPE permeia 0,12% e 1,06%.

Figura 6: Gráfico Modelo de Lucas para os EUA

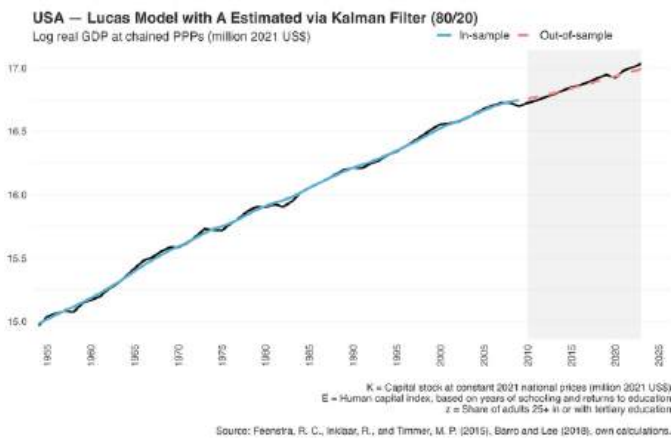


Figura 7: Gráfico Modelo de Lucas para o Brasil

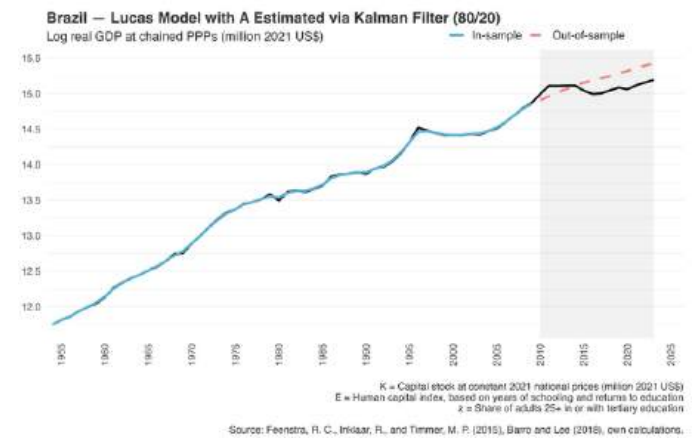


Figura 8: Gráfico Modelo de Lucas para o Reino Unido

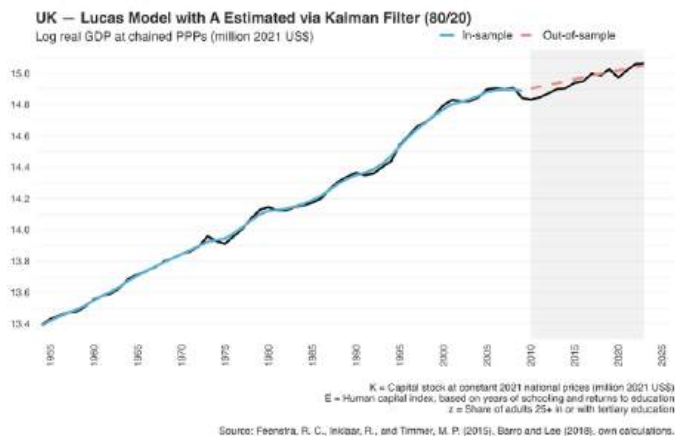
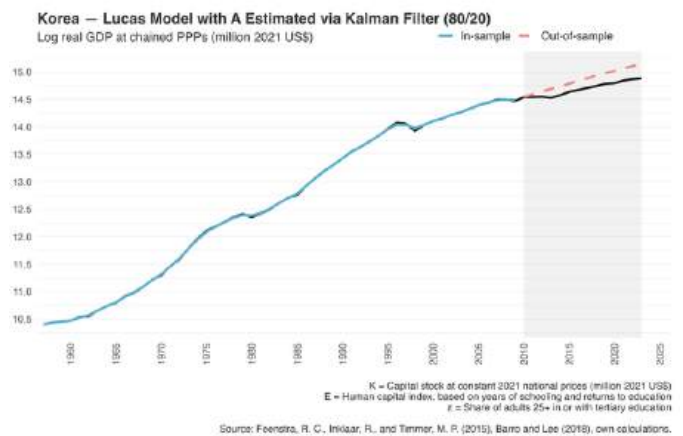


Figura 9: Gráfico Modelo de Lucas para a Coreia do Sul



5. Comparação entre os modelos e conclusões preliminares

Ambos os modelos demonstraram capacidade notável de replicação dos dados históricos. De forma geral, nota-se descolamentos muito suaves da série original, com possíveis quebras de ten-dência muito bem incorporadas. Tendo em vista que a maior parte da série foi usada para deter-minar tanto os parâmetros das variáveis, quanto a forma funcional da variável latente, de modo a melhor explicar a série (período *in-sample*), é de se esperar erros reduzidos. Logo, uma análise

mais robusta deve-se se debruçar sobre a parte da série onde o modelo já está totalmente especificado, isto é, na qual os dados empíricos irão definir se os parâmetros estimados garantem uma boa leitura da realidade.

No que tange o período *out-of-sample*, o Modelo de Lucas exibiu um ajuste marginalmente superior na maioria dos casos, registrando consistentemente os menores valores de RMSE e MAE. O Modelo de Solow, embora robusto, só superou Lucas no caso brasileiro, sugerindo uma menor capacidade de os fatores ligados ao acúmulo de conhecimento como agregador na produtividade do capital humano explicarem o crescimento recente da economia. Essa interpretação, se expandida para casos similares ao brasileiro (como pode ser visto no apêndice para o caso do México, do Chile e da Argentina) e for atribuído certo grau de liberdade, indicaria que o crescimento de economias com menores níveis educacionais tende a ser menos relacionado ao aumento de produtividade pela via educacional do que ao acúmulo de fatores de produção (maior população, por exemplo), portanto exógeno.

O caso americano é particularmente interessante, pois há uma dinâmica clara de crescimento da economia muito próxima de uma tendência linear em logaritmo, assim, se tomada a primeira diferença, a série torna-se praticamente estacionária. Em termos de previsão econométrica, isso implica que modelos capazes de remover corretamente o componente tendencial da série gerariam projeções com erros relativamente reduzidos. Dessa forma, a especificação da equação de estado para o filtro de Kalman com uma forma funcional tendencial, em ambos os modelos estudados, promove uma convergência natural dos resultados preditivos, especialmente em uma economia com as características observadas nos Estados Unidos.

Por fim, ao analisarmos os modelos para os casos coreano e inglês, percebe-se que Lucas obteve erros significativamente menores, indicando que a endogeneidade do incremento produtivo através da educação é parte relevante para explicar o desenvolvimento econômico dessas nações. Mesmo com tendências não lineares nas séries e movimentos aparentes de quebras estruturais, o modelo foi capaz de reproduzir seus respectivos trajetos, sendo este um resultado não só dessas duas economias, mas da maior parte daquelas cuja educação é central para o crescimento (ver apêndice). Portanto, em países desenvolvidos vemos um padrão consistente de melhores resultados a partir do modelo de crescimento endógeno de Lucas do que do crescimento exógeno de Solow.

Vale destacar, entretanto, que os resultados obtidos estão sujeitos a duas limitações principais associadas à especificação do modelo de Lucas. Em primeiro lugar, a proxy adotada para representar a variável z , interpretada como a parcela da população dedicada ao acúmulo de conhecimento e responsável pela ampliação endógena da produtividade do trabalho, corresponde ao percentual de adultos com 25 anos ou mais que cursam ou já cursaram o ensino superior. Assim,

pode não capturar adequadamente a complexidade do processo de formação de capital humano, que envolve também qualidade da educação, experiência no trabalho, aprendizado informal e difusão tecnológica. Em segundo lugar, essa série é originalmente observada em frequência quinzenal e se estende apenas até 2010, sendo necessário aplicar procedimentos estatísticos (já expostos no artigo) para torná-la anual e contemporânea ao restante da base de dados, estendida até 2023. Embora tais procedimentos sejam comuns na literatura empírica, eles impõem restrições à interpretação dos resultados e devem ser considerados na avaliação das conclusões apresentadas.

Referências

ARNOLD, Jens; BASSANINI, Andrea; SCARPETTA, Stefano. *Solow or Lucas? Testing growth models using panel data from OECD countries*. Paris: OECD, 2007. (OECD Economics Department Working Papers, n. 592).

BARRO, Robert J.; LEE, Jong Wha. A new data set of educational attainment in the world, 1950–2010. *Journal of Development Economics*, v. 104, p. 184-198, 2013.

CESARATTO, Sergio; SERRANO, Franklin. As leis de rendimento nas teorias neoclássicas do crescimento. *Revista de Economia Política*, v. 19, n. 4 (76), p. 712-725, 1999. Seções 4.3, 4.3.1, 4.3.2 e 4.3.3.

CHRISTIANO, Lawrence J.; TRABANDT, Mathias; VALENTIN, Karl. DSGE models for monetary policy analysis. In: FRIEDMAN, Benjamin M.; WOODFORD, Michael (org.). *Handbook of Monetary Economics*. v. 3A. Amsterdam: North-Holland, 2010. p. 285-367.

DURBIN, James; KOOPMAN, Siem Jan. *Time series analysis by state space methods*. Oxford: Oxford University Press, 2001.

FEENSTRA, Robert C.; INKLAAR, Robert; TIMMER, Marcel P. The next generation of the Penn World Table. *American Economic Review*, v. 105, n. 10, p. 3150-3182, 2015.

HARVEY, Andrew C. *Forecasting, structural time series models and the Kalman filter*. Cambridge: Cambridge University Press, 1989.

LUCAS, Robert E., Jr. On the mechanics of economic development. *Journal of Monetary Economics*, v. 22, n. 1, p. 3-42, 1988.

SOLOW, Robert M. A contribution to the theory of economic growth. *Quarterly Journal of Economics*, v. 70, n. 1, p. 65-94, 1956.

SOLOW, Robert M. Technical change and the aggregate production function. *The Review of Economics and Statistics*, v. 39, n. 3, p. 312-320, 1957.

APÊNDICE

Figura 10: Gráfico Modelo de Solow para a Argentina

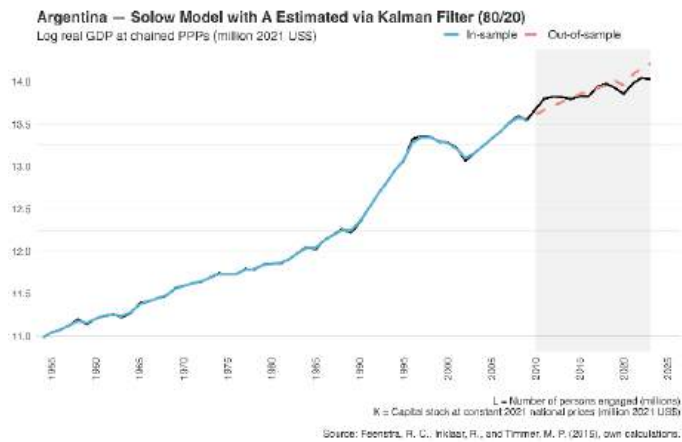


Figura 11: Gráfico Modelo de Lucas para a Argentina

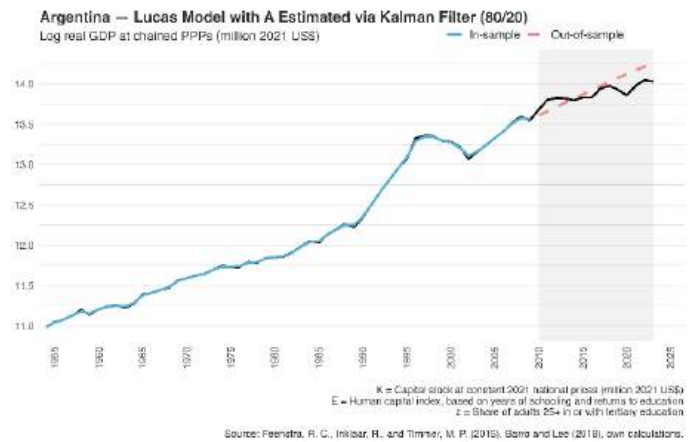


Figura 12: Gráfico Modelo de Solow para a Austrália

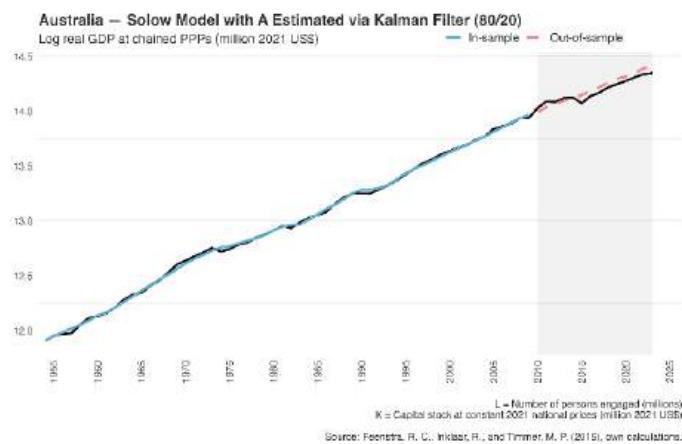


Figura 13: Gráfico Modelo de Lucas para a Austrália

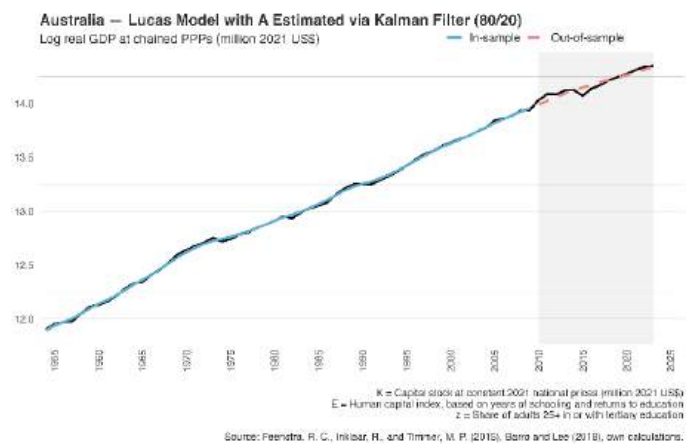


Figura 14: Gráfico Modelo de Solow para a Bélgica

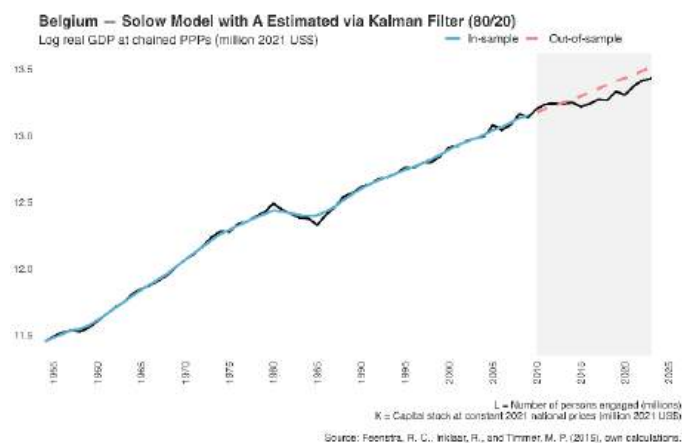


Figura 15: Gráfico Modelo de Lucas para a Bélgica

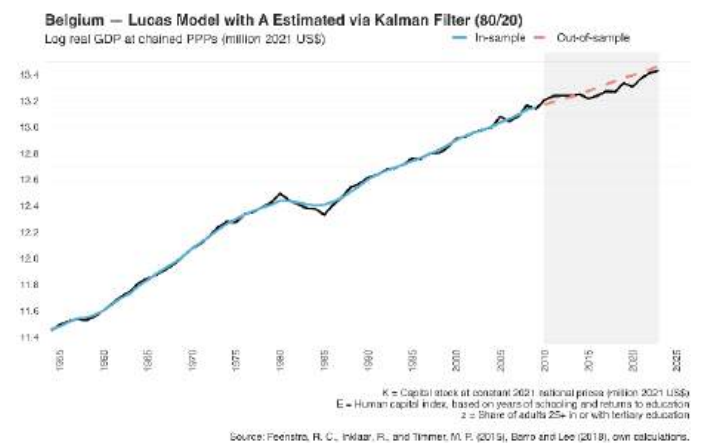


Figura 16: Gráfico Modelo de Solow para a Canadá

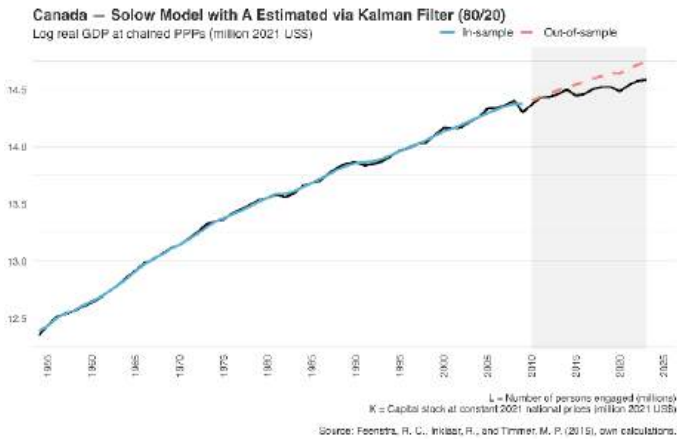


Figura 17: Gráfico Modelo de Lucas para a Canadá

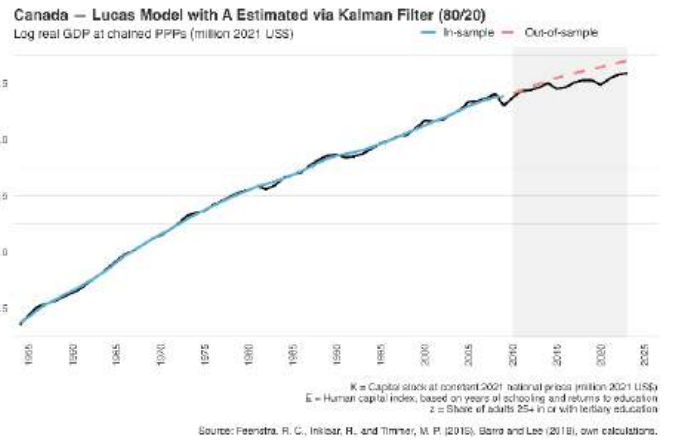


Figura 18: Gráfico Modelo de Solow para o Chile

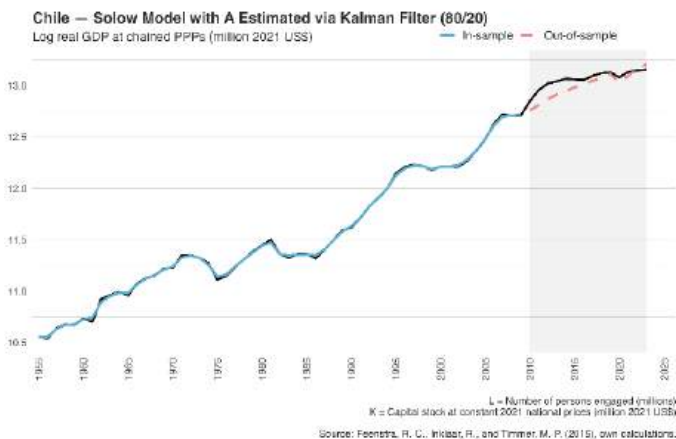


Figura 19: Gráfico Modelo de Lucas para o Chile

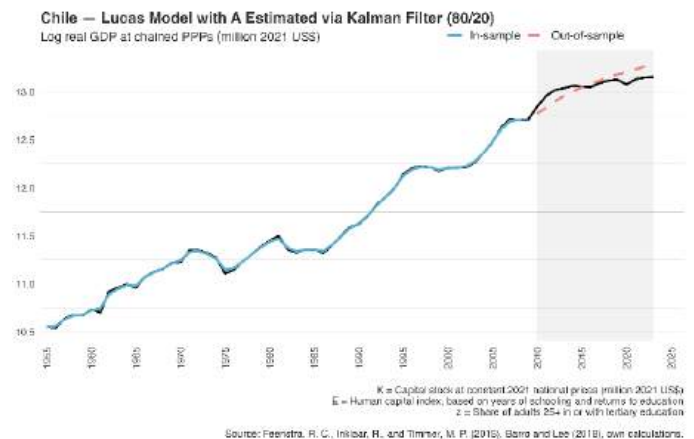


Figura 20: Gráfico Modelo de Solow para a Colômbia

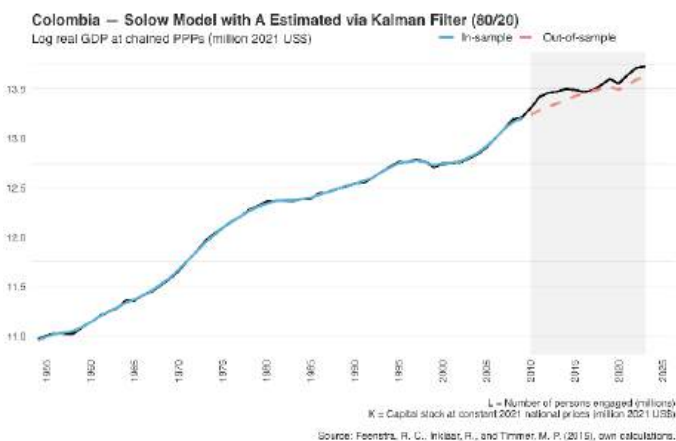


Figura 21: Gráfico Modelo de Lucas para a Colômbia

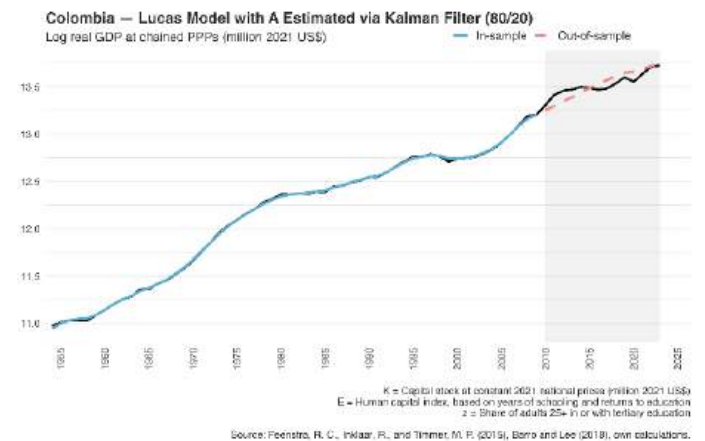


Figura 22: Gráfico Modelo de Solow para a Dinamarca

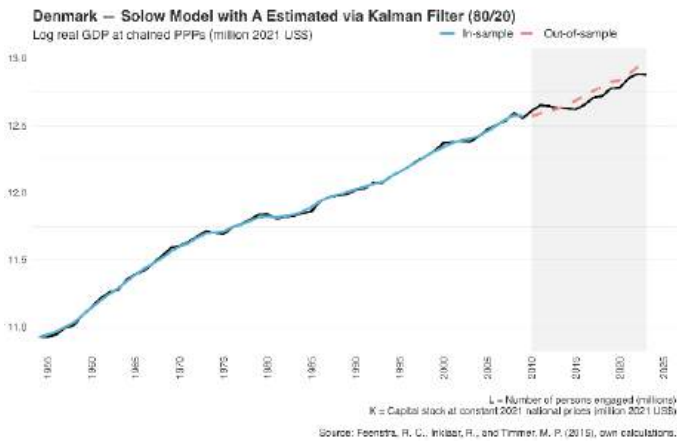


Figura 23: Gráfico Modelo de Lucas para a Dinamarca

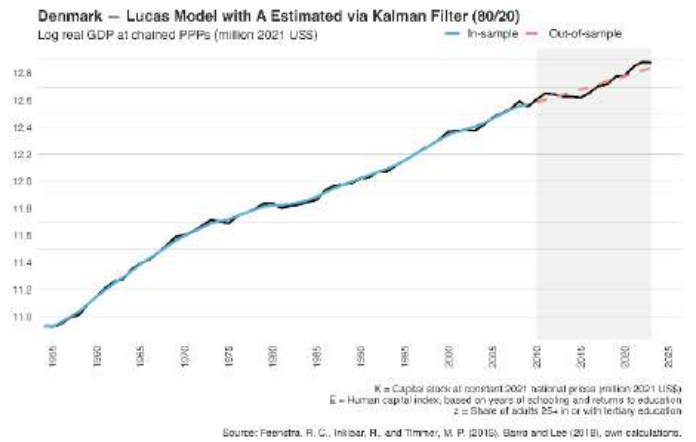


Figura 24: Gráfico Modelo de Solow para a França

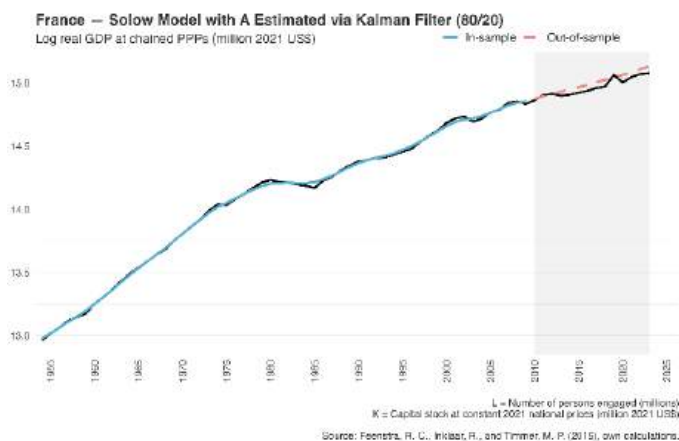


Figura 25: Gráfico Modelo de Lucas para a França

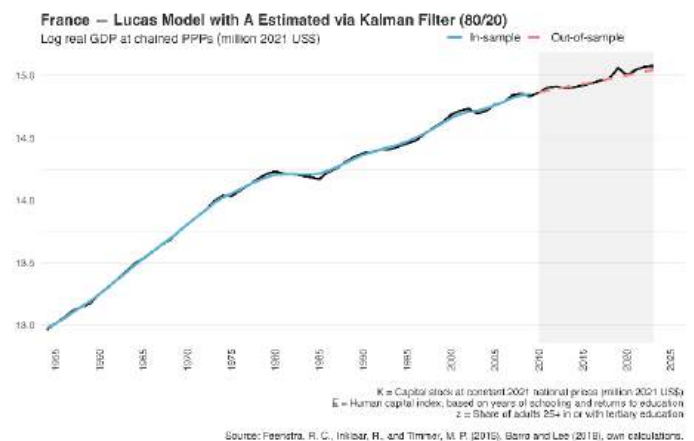


Figura 26: Gráfico Modelo de Solow para a Alemanha

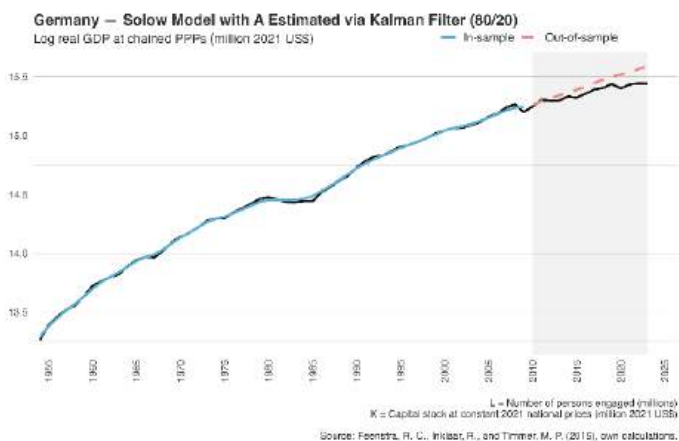


Figura 27: Gráfico Modelo de Lucas para a Alemanha

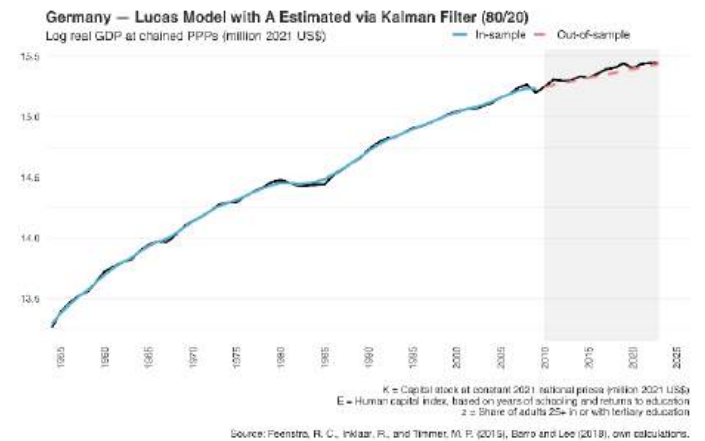


Figura 28: Gráfico Modelo de Solow para o México

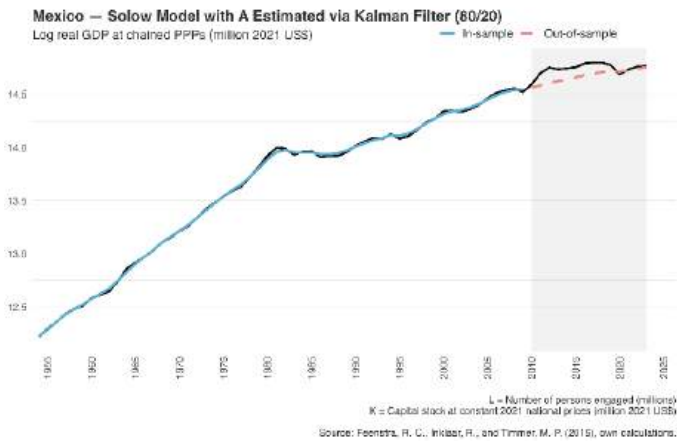


Figura 29: Gráfico Modelo de Lucas para o México

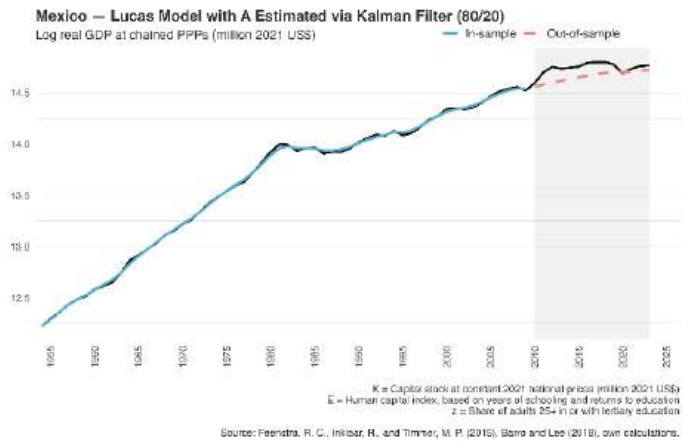


Figura 30: Gráfico Modelo de Solow para a Holanda

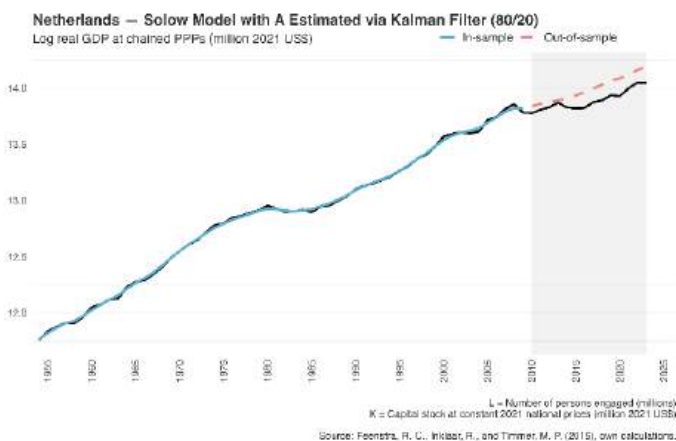


Figura 31: Gráfico Modelo de Lucas para a Holanda

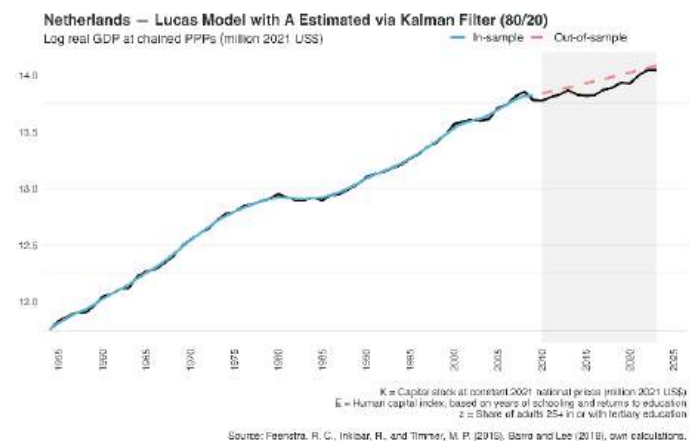


Figura 32: Gráfico Modelo de Solow para a Suécia

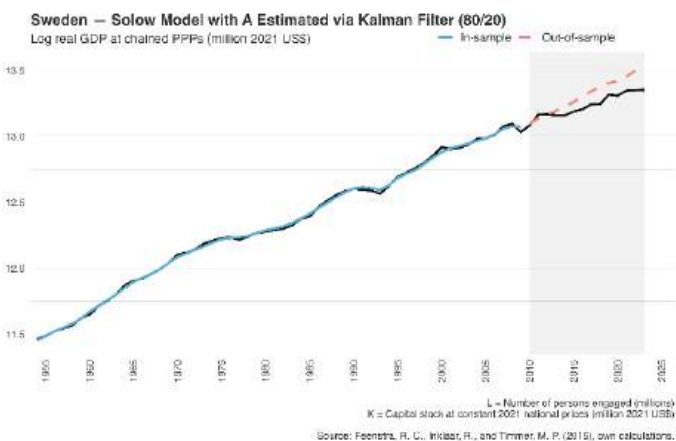


Figura 33: Gráfico Modelo de Lucas para a Suécia

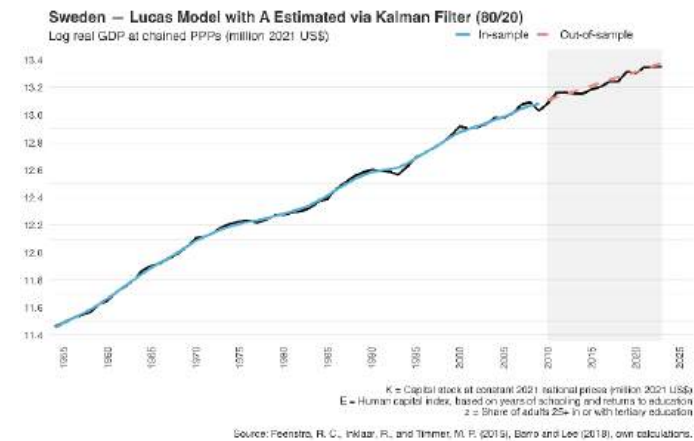


Figura 34: Resultado das métricas de erro para: Argentina, Austrália, Bélgica, Brasil, Canadá, Chile, Colômbia, Alemanha, Dinamarca, França, Reino Unido, Coreia do Sul, México, Holanda, Suécia e Estados Unidos

País	Amostra	RMSE (Solow)	RMSE (Lucas)	MAE (Solow)	MAE (Lucas)	MAPE (Solow)	MAPE (Lucas)
ARG	In-sample	0.011	0.012	0.008	0.009	0.064	0.070
	Out-of-sample	0.090	0.136	0.076	0.114	0.546	0.819
AUS	In-sample	0.018	0.014	0.015	0.012	0.114	0.091
	Out-of-sample	0.046	0.034	0.042	0.026	0.299	0.187
BEL	In-sample	0.018	0.020	0.013	0.015	0.105	0.119
	Out-of-sample	0.075	0.049	0.065	0.043	0.491	0.326
BRA	In-sample	0.014	0.014	0.010	0.010	0.071	0.072
	Out-of-sample	0.117	0.178	0.111	0.161	0.738	1.065
CAN	In-sample	0.018	0.021	0.013	0.015	0.098	0.113
	Out-of-sample	0.103	0.088	0.088	0.077	0.609	0.532
CHL	In-sample	0.014	0.014	0.011	0.011	0.096	0.099
	Out-of-sample	0.085	0.088	0.073	0.078	0.557	0.594
COL	In-sample	0.011	0.011	0.008	0.008	0.070	0.066
	Out-of-sample	0.093	0.073	0.083	0.063	0.615	0.466
DEU	In-sample	0.015	0.015	0.012	0.011	0.081	0.078
	Out-of-sample	0.078	0.030	0.067	0.024	0.433	0.156
DNK	In-sample	0.013	0.014	0.010	0.011	0.087	0.093
	Out-of-sample	0.054	0.037	0.049	0.032	0.389	0.250
FRA	In-sample	0.015	0.015	0.011	0.011	0.078	0.080
	Out-of-sample	0.039	0.027	0.035	0.019	0.235	0.124
GBR	In-sample	0.016	0.016	0.012	0.012	0.081	0.084
	Out-of-sample	0.169	0.038	0.161	0.032	1.073	0.217
KOR	In-sample	0.013	0.013	0.010	0.009	0.079	0.072
	Out-of-sample	0.296	0.177	0.270	0.163	1.829	1.106
MEX	In-sample	0.016	0.016	0.014	0.013	0.098	0.097
	Out-of-sample	0.086	0.095	0.074	0.086	0.501	0.582
NLD	In-sample	0.016	0.016	0.013	0.013	0.097	0.098
	Out-of-sample	0.111	0.075	0.103	0.068	0.740	0.489
SWE	In-sample	0.014	0.017	0.011	0.013	0.089	0.102
	Out-of-sample	0.097	0.023	0.084	0.021	0.631	0.161
USA	In-sample	0.015	0.019	0.011	0.015	0.071	0.094
	Out-of-sample	0.023	0.023	0.022	0.020	0.131	0.121